Angaben zu Aufgabe 3:

Ein schwingfähiges mechanisches System ist mit einem geschwindigkeitsproportionalem Dämpfer ausgestattet.

Das System sei nun schwach gedämpft (D) und wird von außen durch eine periodische Kraft $F(t) = F_0 \cos(\omega_0 t)$ zu erzwungenen Schwingungen angeregt.

3.3 Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung auf, lösen Sie diese mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $v(0) = 0$.

3.4 Stellen Sie graphisch in einem Diagramm im Bereich [0 | 5T] dar:

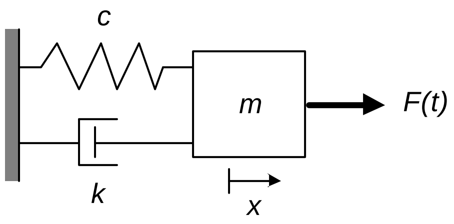
3.4.1 Die Lösung der homogenen Gleichung.

3.4.2 Die partikuläre Lösung.

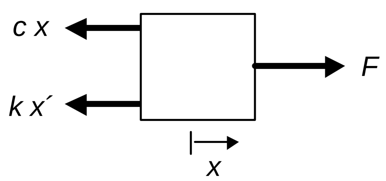
3.4.3 Die allgemeine Lösung $x(t) = x_h(t)+x_p(t)$

c in N/m	m in kg	F_0 in N	D	v_0 in cm/s
20	0.5	1.50	0.1	30

Die beiden Skizzen stellen die Problemstellung inklusive Freischnitt dar. Die Kraft *F* kann von beliebiger Art sein. (In diesem Teil der Aufgabe ist *F* von der Form $F_0\cos(\omega t)$)



kraftgesteuerte angefachte Schwingung



Freischnitt

2. Teil:
Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus dem Freischnitt zu *(F(t) = $F_0\cos(\omega_0 t)$):*

$$x'' + 2\cdot\delta\cdot x' + \omega_0^{\;2}\cdot x = \frac{F_0\cdot\cos(\omega_0\cdot t)}{m_a}$$

Mathcad kann leider die gängige Bezeichnung für die Ableitung nach der Zeit (mit Punkt) nicht darstellen; daher x´ und x´´ (erhält man schnell über STRG F7)

mit den Anfangsbedingungen: $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$

$$\lambda^2 + 2\cdot\delta\cdot\lambda + \omega_0{}^2 \text{ auflösen}, \lambda \rightarrow \begin{bmatrix} -\delta + \left(\delta^2 - \omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ -\delta - \left(\delta^2 - \omega_0{}^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

auflösen der charakteristiischen Gleichung nach null liefert

$$\omega_e = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}$$

ω_e ist die Keisfrequenz die sich unter Reibungseinfluss ergibt.
Da das System nun schwach gedämpft sein soll, mus der Radikant negativ sein, daher werden ω_0 und δ umgedreht.

$$x_h(t) = e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot\cos\left(\omega_e\cdot t\right) + C_2\cdot\sin\left(\omega_e\cdot t\right)\right)$$

homogene Lösung der DGL

homogener Anteil: betrachtet man den homogenen Anteil ohne Störung, so muss die Rechnung für die gegebenen Anfangsbedingungen für $x_h(t)$ null ergeben

$$0 = e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot\cos\left(\omega_e\cdot t\right) + C_2\cdot\sin\left(\omega_e\cdot t\right)\right) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{gleit}, 3 \end{array} \right. \rightarrow 0 = C_1$$

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot\cos\left(\omega_e\cdot t\right) + C_2\cdot\sin\left(\omega_e\cdot t\right)\right)\right] = 0 \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{gleit}, 3 \end{array} \right. \rightarrow -1.\cdot\delta\cdot C_1 + C_2\cdot\omega_e = 0$$

Vorgabe

$$0 = C_1$$

$$1.\cdot\delta\cdot C_1 + C_2\cdot\omega_e = 0$$

$$\text{Suchen}\left(C_1, C_2\right) \text{ gleit}, 3 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_h(t) = e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot\cos\left(\omega_e\cdot t\right) + C_2\cdot\sin\left(\omega_e\cdot t\right)\right) \left| \begin{array}{l} \text{ersetzen}, C_1 = 0 \\ \text{ersetzen}, C_2 = 0 \end{array} \right. \rightarrow x_h(t) = 0$$

parikuläre Lösung: Zur Bestimmung der partilkulären Lösung verwendet man den unten angeführten Ansatz

$$x_p(t) = A\cdot\cos(\omega_0\cdot t) + B\cdot\sin(\omega_0\cdot t)$$ Ansatz

$$x'(t) = \frac{d}{dt}\left(A\cdot\cos(\omega_0\cdot t) + B\cdot\sin(\omega_0\cdot t)\right) \rightarrow x'(t) = -A\cdot\sin(\omega_0\cdot t)\cdot\omega_0 + B\cdot\cos(\omega_0\cdot t)\cdot\omega_0$$

$$x''(t) = \frac{d^2}{dt^2}\left(A\cdot\cos(\omega_0\cdot t) + B\cdot\sin(\omega_0\cdot t)\right) \rightarrow x''(t) = -A\cdot\cos(\omega_0\cdot t)\cdot{\omega_0}^2 - B\cdot\sin(\omega_0\cdot t)\cdot{\omega_0}^2$$

Einsetzen in die gegebene DGL liefert (nach sammeln und symbolisch auswerten):

$$-A\cdot\cos(\omega_0\cdot t)\cdot{\omega_0}^2 - B\cdot\sin(\omega_0\cdot t)\cdot{\omega_0}^2 + 2\cdot\delta\cdot\left(-A\cdot\sin(\omega_0\cdot t)\cdot\omega_0 + B\cdot\cos(\omega_0\cdot t)\cdot\omega_0\right) + {\omega_0}^2\cdot\left(A\cdot\cos(\omega_0\right.$$

$$2\cdot\delta\cdot B\cdot\omega_0\cdot\cos(\omega_0\cdot t) - 2\cdot\delta\cdot A\cdot\sin(\omega_0\cdot t)\cdot\omega_0 = \frac{F_0}{m_a}\cdot\cos(\omega_0\cdot t)$$

daraus werden die Konstanten A und B bestimmt

Vorgabe

$$2\cdot\delta\cdot B\cdot\omega_0 = \frac{F_0}{m_a}$$

$$-(2\cdot\delta\cdot A) = 0$$

$$\text{Suchen}(A, B) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}\cdot\frac{F_0}{\delta\cdot\omega_0\cdot m_a} \end{pmatrix}$$

eine partikuläre Lösung lautet daher: $$\boxed{x_p(t) = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_0}{\delta\cdot\omega_0\cdot m_a}\cdot\sin(\omega_0\cdot t)}$$

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$ <-- Superpositionsprinzip

$$\boxed{x(t) = e^{-\delta\cdot t}\cdot\left(C_1\cdot\cos(\omega_e\cdot t) + C_2\cdot\sin(\omega_e\cdot t)\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{F_0}{\delta\cdot\omega_0\cdot m_a}\cdot\sin(\omega_0\cdot t)}$$

Lösung der DGL

Bestimmung von C_1 und C_2 aufgrund der Anfangsbedingungen x(0) = 0 un v(0) = 0

$$0 = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\omega_e \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\omega_e \cdot t\right)\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0}{\delta \cdot \omega_0 \cdot m_a} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t\right) \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{gleit}, 5 \end{array} \rightarrow 0 = C_1$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left[e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\omega_e \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\omega_e \cdot t\right)\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0}{\delta \cdot \omega_0 \cdot m_a} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t\right)\right] \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen}, t = 0 \\ \text{gleit}, 1 \end{array} \rightarrow 0 = -1$$

Vorgabe

$$0 = C_1$$

$$0 = 1. \cdot \delta \cdot C_1 + C_2 \cdot \omega_e + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0}{\delta \cdot m_a}$$

$$\text{Suchen}\left(C_1, C_2\right) \text{ gleit}, 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -.5 \cdot \dfrac{F_0}{\omega_e \cdot \delta \cdot m_a} \end{pmatrix}$$

Ersetzen von C_1 und C_2 in der Lösung und faktorisieren liefert:

$$x(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot \cos\left(\omega_e \cdot t\right) + C_2 \cdot \sin\left(\omega_e \cdot t\right)\right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{F_0}{\delta \cdot \omega_0 \cdot m_a} \cdot \sin\left(\omega_0 \cdot t\right) \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \text{ersetzen}, C_1 = 0 \\ \text{ersetzen}, C_2 = \dfrac{-1}{2} \cdot \dfrac{F_0}{\omega_e \cdot \delta \cdot m_a} \\ \text{faktor} \end{array} \rightarrow$$

$$x(t) = \frac{1}{2} \cdot F_0 \cdot \frac{\sin\left(\omega_0 \cdot t\right) \cdot \omega_e - e^{-t \cdot \delta} \cdot \sin\left(\omega_e \cdot t\right) \cdot \omega_0}{\omega_e \cdot \delta \cdot m_a \cdot \omega_0}$$

Für die graphische Darstellung benötigt man die angegebenen Zahlenwerte:

$c := 20\frac{N}{m}$ $m_a := 0.5\cdot kg$ $F_0 := 1.5\cdot N$ $\omega_0 := \sqrt{\frac{c}{m_a}}$ $\omega_0 = 6.325\frac{1}{s}$

$D := 0.1$ $D = \frac{\delta}{\omega_0}$ auflösen, $\delta \rightarrow .63245553203367586640\cdot\left(\frac{N}{m\cdot kg}\right)^{\frac{1}{2}}$

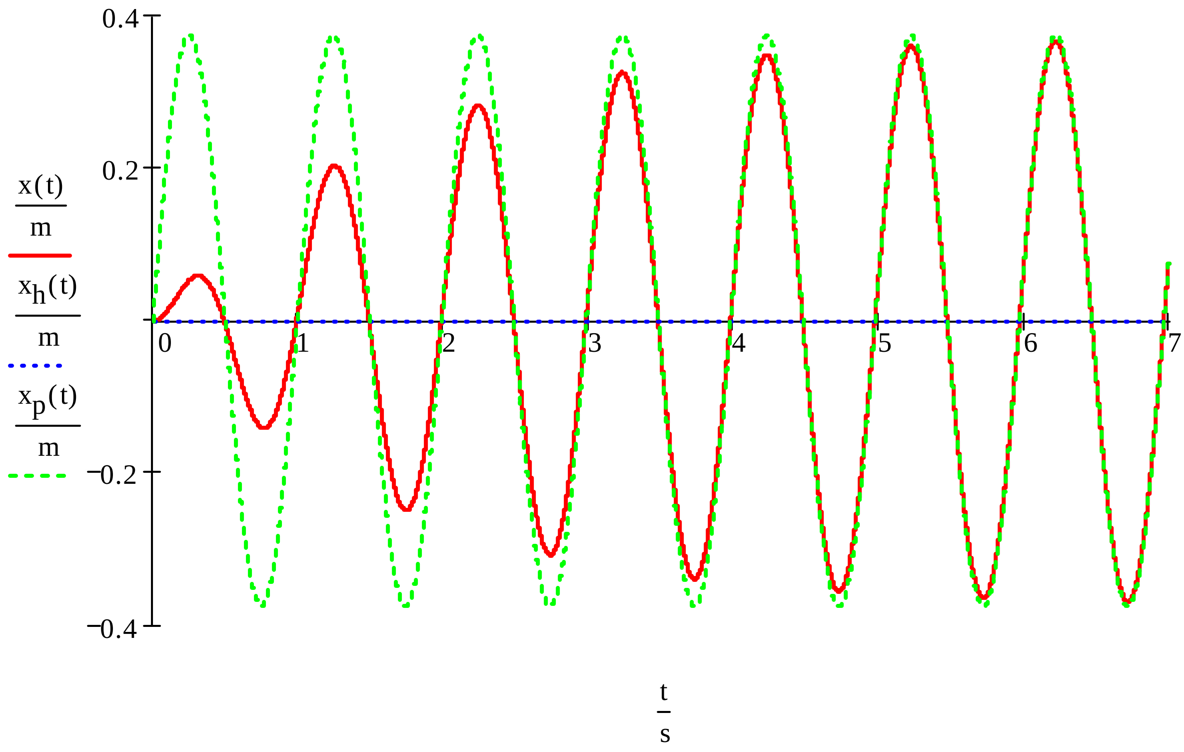
$\delta = \frac{k}{2\cdot m_a}$ $\left|\begin{array}{l} \text{ersetzen}, \delta = .63245553203367586640\cdot\frac{1}{s} \\ \text{auflösen}, k \end{array}\right. \rightarrow .63245553203367586640\cdot\frac{kg}{s}$

$\delta := .63245553203367586640\cdot\frac{1}{s}$

$k := .63245553203367586640\cdot\frac{kg}{s}$ $\omega_e := \sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}$ $\omega_e = 6.293\frac{1}{s}$ $T := \frac{2\cdot\pi}{\omega_e}$

$t := 0\cdot s, 0.0001\cdot s .. 7\cdot T$

$x_h(t) := 0$ $x_p(t) := \frac{1}{2}\cdot\frac{F_0}{\delta\cdot\omega_0\cdot m_a}\cdot\sin(\omega_0\cdot t)$ $x(t) := \frac{1}{2}\cdot F_0\cdot\frac{\sin(\omega_0\cdot t)\cdot\omega_e - e^{-t\cdot\delta}\cdot\sin(\omega_e\cdot t)\cdot\omega_0}{\omega_e\cdot\delta\cdot m_a\cdot\omega_0}$



zurück zur Startdatei